Prof. Dr. Alfred Toth

Die einfachste Sylowgruppe für die Semiotik

1. Bekanntlich hatte Bense (1981, S. 17 ff.) die ersten drei ganzen Zahlen (1, 2, 3) als „Primzeichen" im Sinne von „Zeichenzahlen" in die Semiotik eingeführt. Indem er die 1 zur Primzahl erklärt, verstößt er natürlich gegen den Hauptsatz der Zahlentheorie, da dadurch die Primfaktorenzerlegung nicht mehr eindeutig würde. Natürlich liegt der Hauptgrund für Benses Entscheidung darin, daß er bereits 1975 die Peanoaxiome mit Hilfe der drei peirceschen Fundamentalkategorien der Erst-, Zweit- und Drittheit reformuliert hatte (Bense 1975), aber ein weiterer Grund besteht darin, daß Bense die Gruppentheorie, die ihn schon in den 30er Jahren faszinierte, weil sie damals gerade begonnen hatte, die Mathematik von Grund auf zu verändern, ebenfalls mit Hilfe der peirceschen Kategorien in die Semiotik einführen wollte, indem er die Menge der Primzeichen als Gruppe definierte. Er notierte allerdings nur kurz, daß die kleine semiotische "Matrix (innerer Produktbildung zu den relationalen Subzeichen) der Cayleyschen Gruppentafel entspricht" (1986, S. 43).

2. Wir gehen in der Folge von der Menge der Primzeichen P = (2, 3, 5) und der Verknüpfung „*" aus. Wir nehmen folgende Zuordnungen vor: $a \rightarrow 2$, $b \rightarrow 3$, $c \rightarrow 5$. Die einzelnen Produkte lassen sich dann in der nachstehenden semiotischen Gruppentafel darstellen.

*	2	3	5
2	5	2	3
3	2	3	5
5	3	5	2

Man kann zeigen, daß die Menge P und ihre Produkte die vier Gruppenaxiome erfüllen (vgl. bereits Toth 2006, S. 11 ff.).

Die Abgeschlossenheitsbedingung ist erfüllt, weil jedem geordneten Paar der Gruppe ein eindeutig bestimmtes Produkt entspricht:

$2 * 2 = 5$

$2 * 3 = 3 * 2 = 2$

$2 * 5 = 5 * 2 = 3$

$3 * 3 = 3$

$3 * 5 = 5 * 3 = 5$

$5 * 5 = 2$

Die Assoziativität ist ebenfalls erfüllt:

$2 * (3 * 5) = (2 * 3) * 5 = 3$

$2 * (2 * 5) = (2 * 2) * 5 = 2$

$2 * (3 * 2) = (2 * 3) * 2 = 5$

$3 * (5 * 3) = (3 * 5) * 3 = 5$

$5 * (5 * 2) = (5 * 5) * 2 = 5$

Für $a \neq b \neq c$ ergibt sich als Produkt immer 3:

$2 * (3 * 5) = (2 * 3) * 5 = 3$

$2 * (5 * 3) = (2 * 5) * 3 = 3$

$3 * (2 * 5) = (3 * 2) * 5 = 3$

$3 * (5 * 2) = (3 * 5) * 2 = 3$

$5 * (2 * 3) = (5 * 2) * 3 = 3$

$5 * (3 * 2) = (5 * 3) * 2 = 3$

und dieses ist das Einselement, denn es gilt:

$2 * 3 = 3 * 2 = 2$

$3 * 3 = 3 * 3 = 3$

$5 * 3 = 3 * 5 = 5$

Jedes Element hat ein inverses Element:

$2 * (2)^{-2} = 2 * 5 = 3$

$3 * (3)^{-2} = 3 * 3 = 3$

$5 * (5)^{-2} = 5 * 2 = 3$,

d.h., es ist $(2)^{-1} = 5$, $(3)^{-1} = 3$, $(5)^{-1} = 2$.

Literatur

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Bense, Max, Repräsentation und Fundierung der Realitäten. Baden-Baden 1986

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2006

5.7.2019